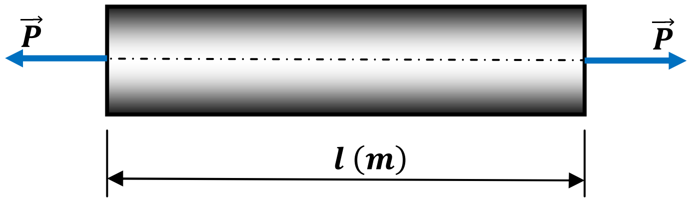
TRACTION ET COMPRESSION

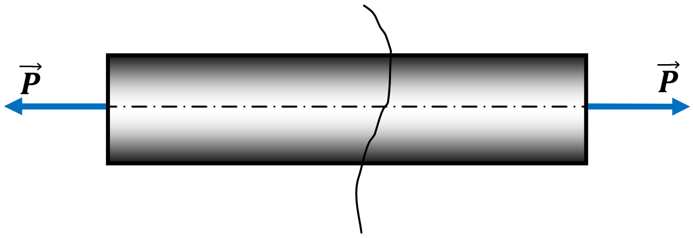
Définition

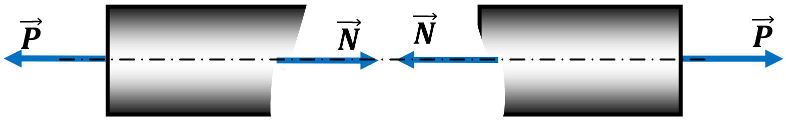
Une poutre est sollicitée en traction lorsque les actions aux extrémités se réduisent à deux forces égales et opposées, portées par la ligne moyenne $\boldsymbol{l}\ (\boldsymbol{m})$.



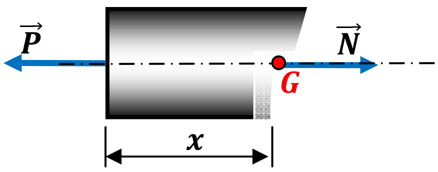
1. Forces intérieures et contraintes engendrées dans les sections droites d'une barre en traction ou une compression:

A l'aide de la méthode des sections, on aperçoit qu'il apparaît dans toutes les sections droites de la barre des forces normales N.



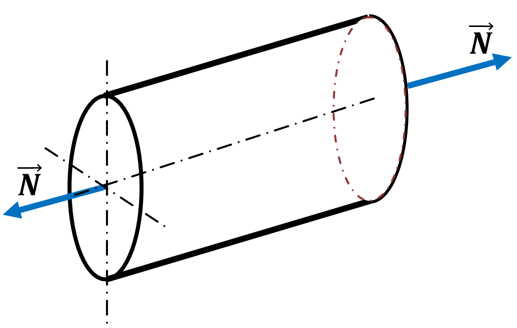


L'effort $\boldsymbol{P}$ est appelé effort normal, il est noté par $\boldsymbol{N}$. Quelle que soit la section considérée de la poutre, il s'exerce toujours au barycentre $\boldsymbol{G}$ de la section (Centre de gravite).

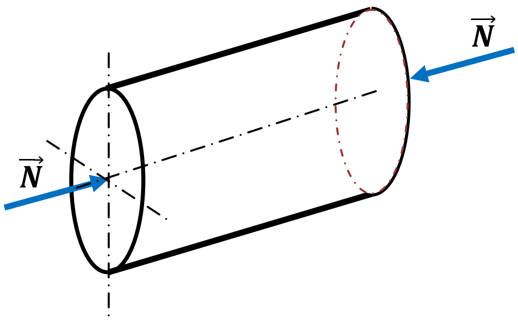


ou $\vec{\boldsymbol{N}} = \vec{\boldsymbol{P}}$

La traction ne défère de la compression que par le signe de l'effort normal N.



Barreau en tension



Barreau en compression

La valeur de l'effort normal $\vec{N}_x$ dans une section droite quelconque d'une barre est égale à la somme algébrique de tous les efforts longitudinaux externes (efforts concentrés et charges arbitrairement réparties).

La formule générale donnant la valeur de l'effort longitudinal dans une section droite arbitraire de la barre est de la forme suivante:

$$\vec{N}_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i + \sum_{i=1}^{1} \int_{0}^{x} q(x)dx$$

L'intégrale s'étend à la totalité de la longueur de chaque partie soumise à une charge répartie et la sommation de toutes les parties se trouvant du même coté de la section considérée.

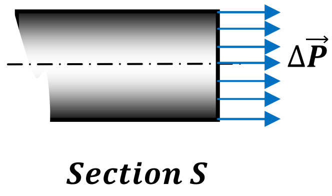
Diagramme ou épure de l'effort normal:

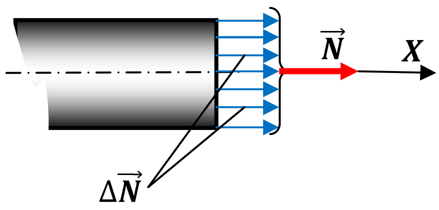
La fonction représentant les valeurs de l'effort normal suivant l'axe de la barre s'appelle le diagramme ou épure de l'effort normal.
Pour tracer l'épure de l'effort normal, on se sert de la méthode des sections. On divise la fibre moyenne par des segments séparés par le point d'application des charges.

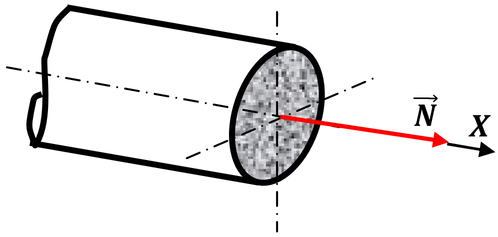
Le diagramme tracé peut être positif comme négatif:
Positif si $N > 0$ donc, on a une sollicitation de traction.
Négatif si $N < 0$ donc, on a une sollicitation de compression.

2. Contraintes Normales:

Chaque élément de surface $\Delta \boldsymbol{S}$ supporte un effort de traction $\Delta \vec{\boldsymbol{P}}$ parallèle à la ligne moyenne.







La contrainte normale est définie comme l'intensité de la force normale par unité de surface et elle est exprimée en unité de force par unité de surface $(\boldsymbol{N/mm^2})$ ou en $(\boldsymbol{MPa})$**.**

La valeur de la contrainte normale dans une section droite arbitraire est de ce fait déterminée par le rapport de l'effort longitudinal $\boldsymbol{N}$ à l'aire de la section $\boldsymbol{S}$.

$$\boldsymbol{\sigma_x = \frac{N_x}{S}}$$

Dans le cas d'un tige homogène soumise à ses extrémités à des efforts de traction, les contraintes aussi bien dans une section que dans la longueur, c'est à dire qu'on a une seule et même contrainte dans tous les points. On dit qu'on a un état de contrainte homogène (tous les points du corps se trouvent dans les mêmes conditions).

3. CONTRAINTE ADMISSIBLE: (ou condition de résistance).

Lors du calcul des pièces qui travaillent à la traction ou à la compression, on doit toujours vérifier d'une façon générale que dans la section la plus sollicité la plus grande contrainte qui se développe est inférieure à la contrainte admissible du matériau. (Celle-ci étant déterminée par expérience).

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] = R_{pe} = R_e/s$$

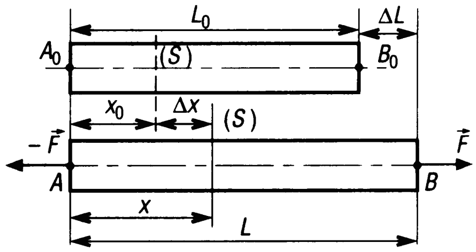
Soient :

- ☞ $\boldsymbol{R_e}$ la résistance élastique du matériau en $(\boldsymbol{MPa})$;
- ☞ $\boldsymbol{s}$ un coefficient de sécurité ;
- ☞ $\boldsymbol{R_{pe}}$ la résistance pratique à l'extension, avec $\boldsymbol{R_{pe} = R_e/s}$.

4. Loi de Hooke

En déformation élastique, la contrainte normale σ est proportionnelle à l'allongement relatif ε.

$$\sigma = E.\varepsilon$$



σ = contrainte normale en Mpa
E = module de Young en Mpa
ε = allongement relatif sans unités

Remarque:

***E* est une constante du matériau.**

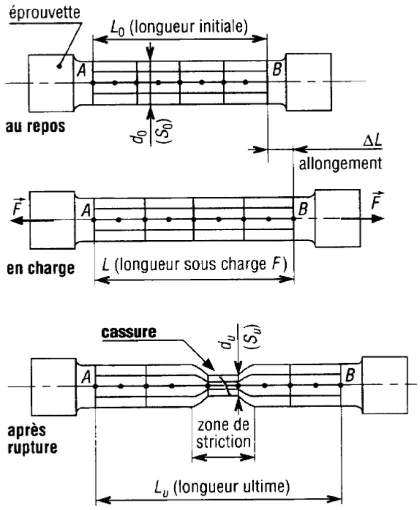
matériau	Module de Young daN/mm^2		matériau	Module de Young daN/mm^2
carbures métalliques	55 000		**zinc**	8 000
tungstène	42 000		**alliage d'aluminium**	7 000 à 7 500
aciers	17 000 à 28 000		**verre**	7 000 à 7 500
aciers de construction	20 000 à 22 000		**magnésium**	4 500
cuivre	12 600		**étain**	4 000
titane	10 500		**béton**	2 000
bronze	10 000 à 12 000		**bois**	1 000 à 3 000
fonte	10 000		**caoutchouc**	0,75
laiton	9 200		**élastomère**	0,3

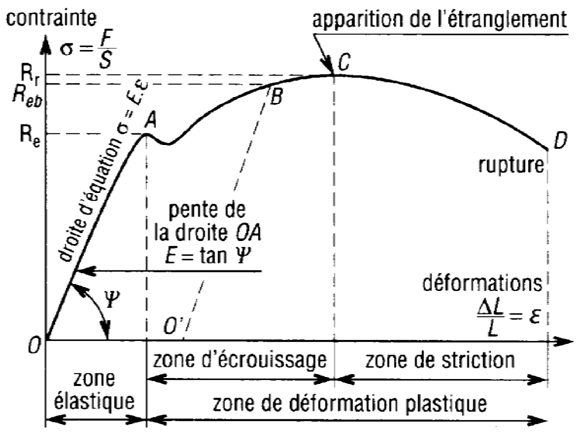
5. Essai de traction:

Essai le plus classique, il consiste à exercer sur une éprouvette normalisée (pièce de dimensions normalisées fabriquée dans le matériau à tester), cylindrique ou parallélépipédique (plate), deux actions mécaniques et opposées qui vont la déformer progressivement puis la rompre.

Courbes de contraintes et déformation

Pour un grand nombre de matériaux, comme les alliages, les courbes obtenues présentent une zone, appelée domaine élastique où le graphe est une droite (segment OA). Pour tous les points de cette droite, la déformation (ou l'allongement) est proportionnelle à la contrainte et le matériau est élastique.



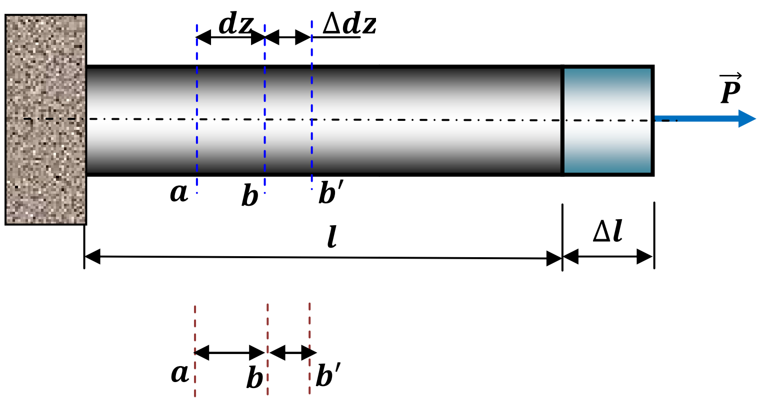


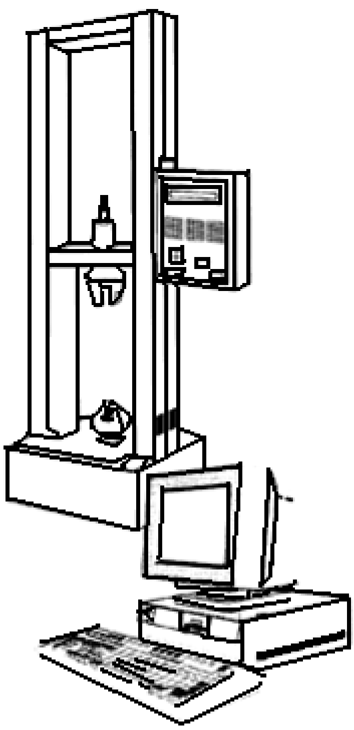
Module d'élasticité longitudinale E (N/mm^2) ou Mpa

Il caractérise la pente de la droite de proportionnalité précédente et l'élasticité du matériau testé. Plus E est grand, plus le matériau est rigide et inversement.

4. ALLONGEMENT D'UNE TIGE ET LA LOI DE HOOKE:

Les dimensions d'une tige varient en fonction de la grandeur des forces appliquées. Si avant le chargement de la tige sa longueur est l, une fois chargée elle devient $l + \Delta l$. La quantité Δl est appelée allongement absolu de la tige.





Pour une tige chargée à un état de contrainte homogène et que tous ses éléments se trouvent dans les mêmes conditions, la déformation relative ε suivant l'axe est partout la même et est égale à sa valeur moyenne sur la longueur l.

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, cette quantité est appelée allongement relatif de la tige.

Dans le cas d'un état de contrainte non homogène, on détermine la déformation de la section $A - A$ par passage à la limite pour un petit élément dz.

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} \qquad (1)$$

Pour des allongements petits, on a pour la plupart des matériaux la loi de Hooke qui exprime la dépendance linéaire entre les contraintes et les déformations.

$$\sigma = E.\varepsilon \qquad (2)$$

Sachant que

$$\sigma = N/S \qquad (3)$$

Remplaçons les équations (1) et (3) dans l'équation (2), nous obtenons:

$$\Delta dz = \frac{N.dz}{E.S} \qquad (4)$$

L'allongement absolu de la tige de longueur l est égal:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N\,dz}{ES} \qquad (5)$$

Lorsque la tige n'est chargée qu'en ses extrémités, l'effort normal est égal $N = P$ et ne dépend pas de l'abscisse z. Si en outre la section de la tige S est constante, on déduit l'expression suivante:

$$\Delta l = \frac{P\,l}{ES} \qquad (6)$$

Remarque:

Dans la résolution des problèmes, on doit prendre en considération non seulement les allongements dus aux forces normales, mais aussi les allongements dus à la température. Pour cela, on se sert alors de la méthode de superposition, et on considère que la déformation ε est égal à la somme de la déformation du aux forces normales et celle du à la température.

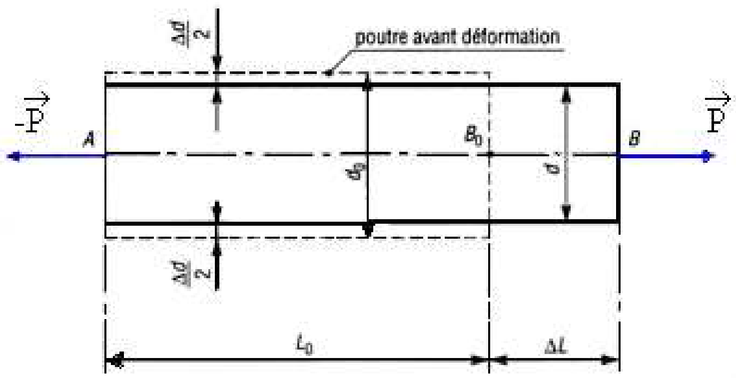
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha.\Delta t$$

5. Contraction latérale: (Coefficient de Poisson $\boldsymbol{\upsilon}$)

Le coefficient de Poisson caractérise le rapport entre l'allongement relatif de la poutre ε_L et la contraction latérale ε_d .

$$\upsilon = -\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_L} = -\frac{déformation\ latérale}{déformation\ axiale}$$

$$\upsilon = \frac{\varepsilon_D}{\varepsilon_L} = \frac{\Delta D/_D}{\Delta L/_L} = \frac{déformation\ latérale}{déformation\ axiale}$$



5. DILATATION THERMIQUE D'UNE TIGE:

Une variation de température entraîne-elle aussi un allongement (ou un accourcissement) qui s'ajoute alors aux déformations dus aux efforts.

On détermine la déformation due à la dilatation thermique à l'aide de l'équation suivante:

$$\varepsilon_t = \alpha.\Delta t$$

α: coefficient de dilatation linéique.
Δt: écart de température imposé.

Donc l'allongement absolu du à une variation de température peut être déterminé:

$$\Delta l_t = \varepsilon_t . l = \alpha . l . \Delta t$$

On peut donc évaluer l'allongement total d'une tige homogène chargé à ses extrémités et uniformément chauffé.

$$\delta = \Delta l_{Tot} = \Delta l_{(P)} + \Delta l_{(Temp)}$$

$$\Delta l_{Tot} = \frac{Pl}{ES} + \alpha . l . \Delta t$$

ENEGIE POTENTIELLE DE DEFORMATION:

Considérons le processus de déformation d'un corps élastique du point de vue énergétique. Les forces appliquées à un corps effectuent un travail A. Le travail se transforme partiellement en énergie potentielle U du corps déformé et partiellement en énergie cinétique K imprimant à la masse du corps une certaine vitesse.

L'équation d'équilibre s'écrit:

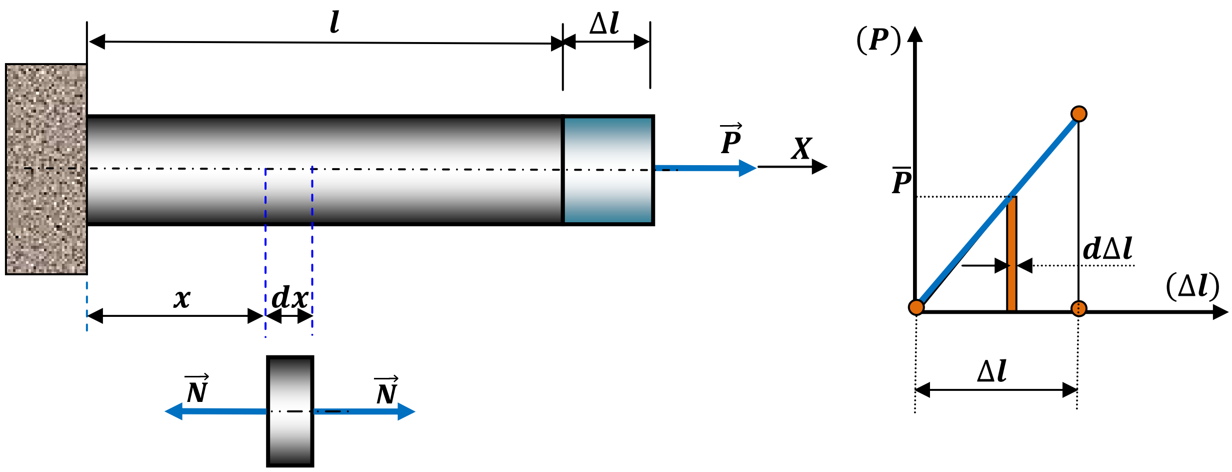
$$A = U + K \qquad (7)$$

Si la charge appliquées est lente alors la vitesse de déplacement de la masse est très petite, de cette manière on peut poser que l'énergie cinétique $K = 0$, un tel processus de charge est dit statique puisque le corps se trouve à tout moment à l'état d'équilibre.

L'équation (4) devient:

$$A = U$$

REPRESENTATION SCHEMATIQUE D'UN ESSAI DE TRACTION:



Puisque la force P est variable sur le trajet Δl, le travail de traction de barre doit être calculé par intégration. Le travail correspondant au déplacement élémentaire $d(\Delta l)$ de la force $\bar{P}$ $\overline{P}$ est égal à:

$$dA = \bar{P}. d(\Delta l)$$

Il est évident que le travail fourni pour exercer un allongement Δl est égal à l'aire du triangle OBC, soit numériquement égal à:

$$A = U = \frac{1}{2} Pl$$

si la force P est constante sur le trajet Δl, son travail peut être simplement déterminer par le produit de la force P et l'allongement Δl.

On utilisant l'équation (1) et on remplaçant $\Delta l = \frac{Pl}{ES}$, on peut alors déterminer l'énergie potentielle de déformation nécessaire:

$$U = \frac{P^2 l}{2ES}$$

Si l'effort normal N est variable tout le long de l'axe de la tige, l'énergie potentielle de déformation est calculée en faisant la somme des travaux élémentaires correspondant aux segments élémentaires dx respectivement.

Pour un segment élémentaire dx, on a:

$$dU = \frac{N^2 dx}{2ES}$$

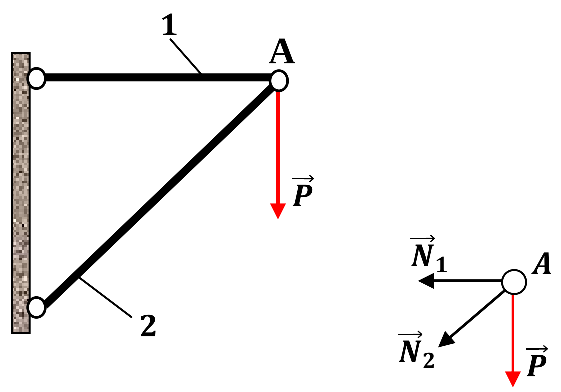
Pour la barre de longueur l, on a:

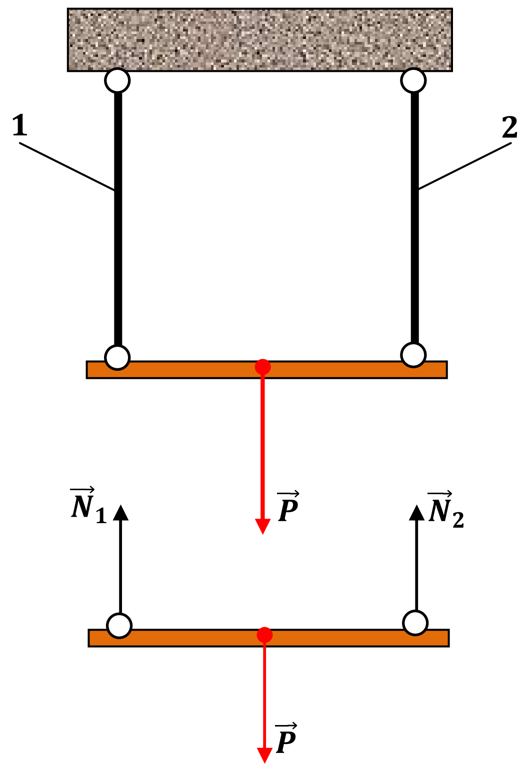
$$U = \int_0^l \frac{N^2 dx}{2ES}$$

Problèmes concernant les systèmes isostatiques et hyperstatiques:

Pour la résolution des systèmes isostatiques, les équations d'équilibres sont suffisantes à déterminer toutes les réactions.

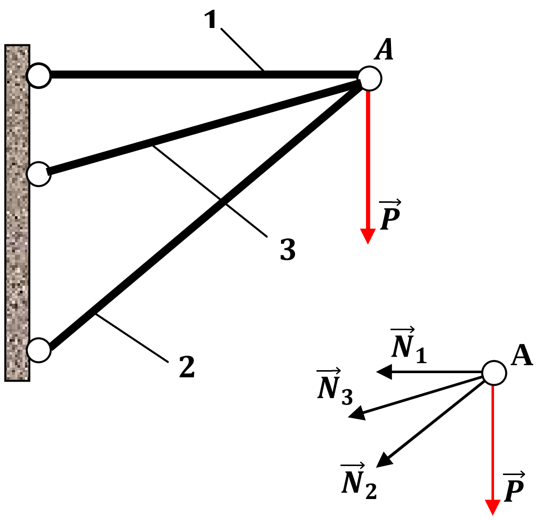
Cependant dans la pratique, on rencontre constamment des systèmes avec un grand nombre de liaisons. De tels systèmes sont dit hyperstatiques.

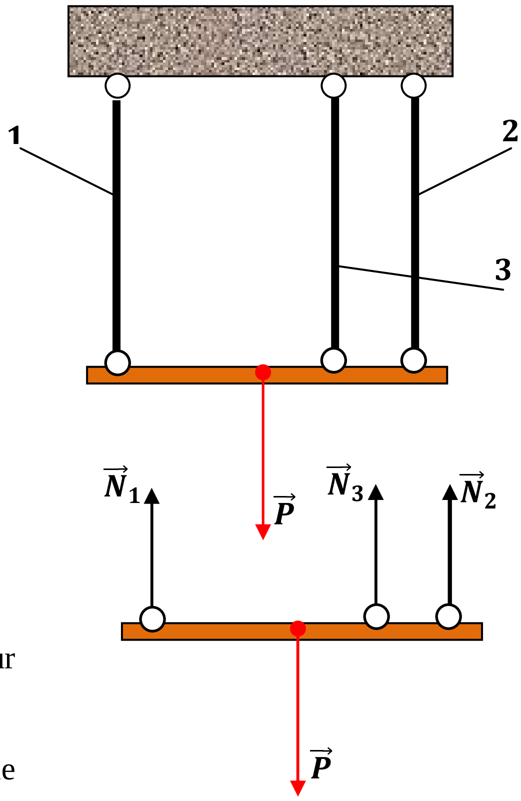




Deux tiges, deux inconnues.

Les équations d'équilibres sont suffisantes pour déterminer les forces normales N_1 et N_2.



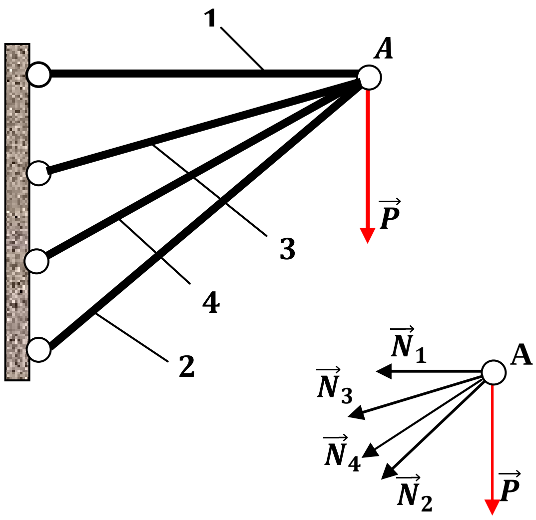


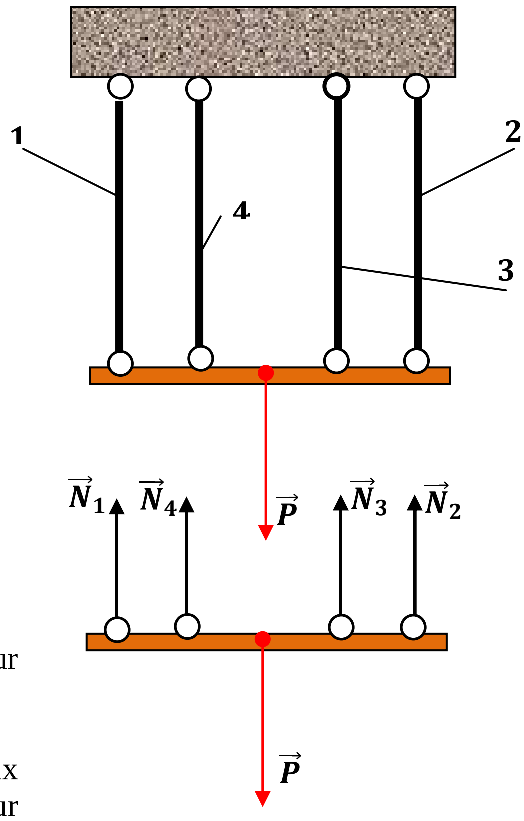
Trois tiges, trois inconnues.

Les équations d'équilibres sont insuffisantes pour déterminer les forces normales $\boldsymbol{N_1}$ et $\boldsymbol{N_2}$ et $\boldsymbol{N_3}$.

3 inconnus – 2 équations d'équilibres = 1

Le système est hyperstatique du 1er degré (une équation supplémentaire est nécessaire pour résoudre le système d'équations).





Quatre tiges, quatre inconnues.

Les équations d'équilibres sont insuffisantes pour déterminer les forces normales N_1, N_2, N_3 et N_4.

4 inconnus – 2 équations d'équilibres = 2

Le système est hyperstatique du 2ème degré (deux équations supplémentaires sont nécessaires pour résoudre le système d'équations).

Définition:

On dit qu'un système est d'ordre "n" degrés d'hyperstatismes lorsque le nombre de liaisons est supérieur à celui des équations indépendantes de la statique de n unités.

Pour la résolution des systèmes hyperstatiques, il faut former autant de nouvelles équations qu'il le faut. Pour cela, les nouvelles équations formées reflètent les particularités des liaisons géométriques imposées aux systèmes déformés et sont conventionnellement appelées équations des déplacements ou équations de compatibilité géométriques.

Machine de traction