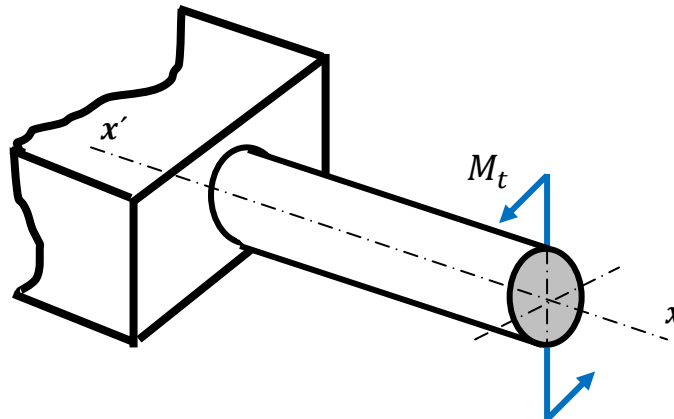


TORSION

Définition: La torsion est un mode de charge telle que dans les sections droites de la barre, seul apparaît un moment de torsion. Les autres facteurs de forces (Moment fléchissant, force normale et effort tranchant) sont nuls.

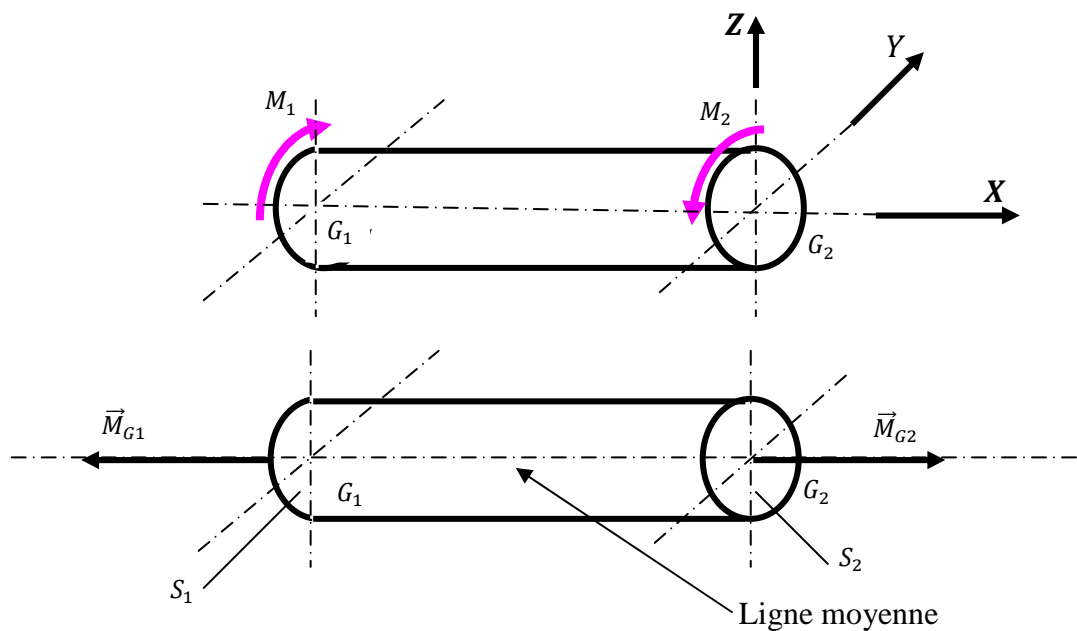


Convention de signe: Pour le moment de torsion, quelle soit la forme de la section. On a adopté la règle des signes qui suit. Si un observateur regardant la section droite du côté de la normale extérieure voit le moment de torsion M_t ($M_{torsion}$) dirigé dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, on considère que le moment est positif. Il est négatif s'il est dirigé dans le sens contraire.

I.1 : Hypothèses particulières:

- Le solide étudié est une poutre cylindrique droite de section circulaire.
- Le diamètre de la section est constant.
- Le poids de la poutre est négligeable.

I.2 : Hypothèse sur le système des forces extérieures appliquées et sur les déformations qui en résultent:

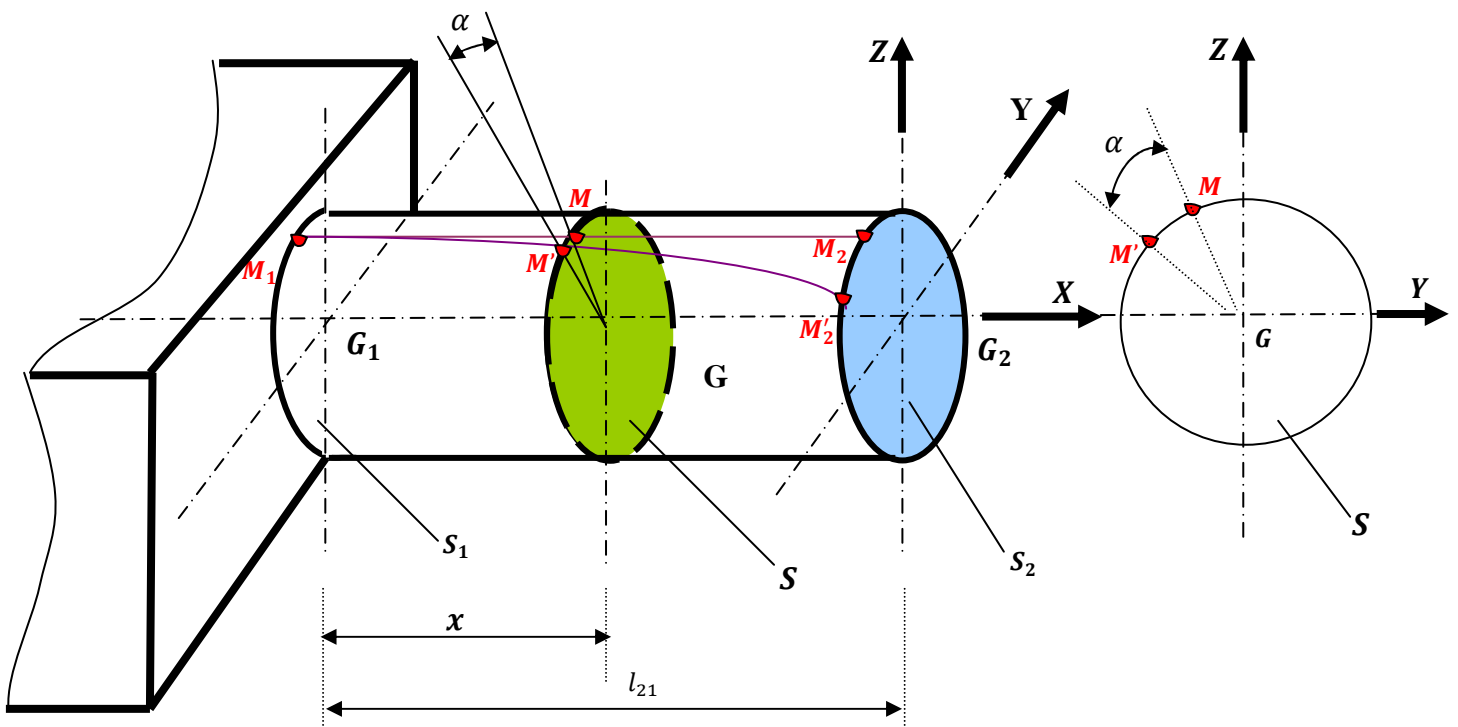


- La poutre est sollicitée en torsion simple lorsqu'elle est soumise à ses deux extrémités à deux couples \vec{M}_{G1} et \vec{M}_{G2} ayant pour support la ligne moyenne et tel que $\vec{M}_{G1} + \vec{M}_{G2} = \vec{0}$
- Les déformations seront toujours limitées au domaine élastique et la variation des fibres est considéré comme négligeable.

II : Etude expérimentale:

II.1 : Essai de torsion:

Le dispositif expérimental peut être schématisé de la manière suivante:



La poutre (cylindrique de révolution) est parfaitement encastree à son extrémité gauche de la section S_1 de centre de gravité G_1 . On trace avant l'essai une génératrice M_1M_2 du cylindre à l'extrémité droite de la section S_2 de centre de gravité G_2 . Un système de force extérieur pouvant se traduire à un seul vecteur moment \vec{M}_{G2} porté sur l'axe $x'x$.

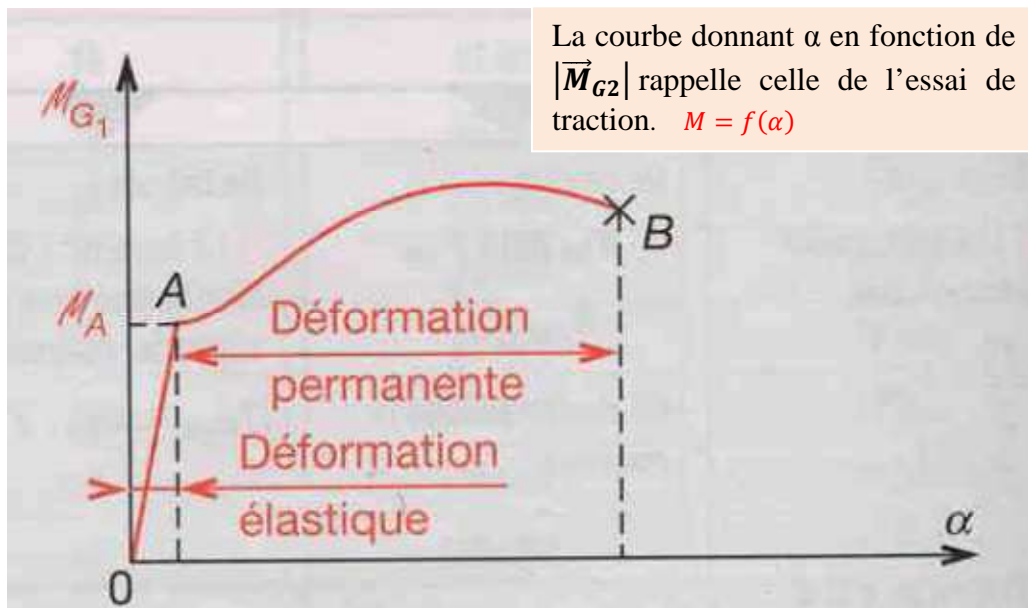
En faisant croître $|\vec{M}_{G2}|$, on mesure les déformations de la poutre.

- Toute section plane est normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe.
- La distance entre deux sections droites données reste sensiblement constante.
- Le déplacement d'une section droite est uniquement une rotation d'un angle α autour de son axe, et cette rotation est proportionnelle à la distance x à la section d'encastrement.

$$\alpha = K \cdot x$$

La génératrice du cylindre se déforme donc suivant une hélice (M_1, M'_2). Lorsque \vec{M}_{G2} croit, un système enregistreur permet de mesurer l'angle α .

Considérons l'enregistrement d'un essai de torsion:



Remarque:

- Si $M_{G2} < M_A$, l'angle de torsion α est proportionnel au couple appliqué. Si pendant cette phase de l'essai, on annule M_{G2} la déformation α disparaît.

OA : correspond donc à une phase de déformation élastique.

- Si $M_{G2} > M_A$, la déformation devient permanente et se termine au point C par la rupture de la poutre.

II: Angle unitaire de torsion:

Pour une valeur de M_{G2} ($M_{G2} < M_A$), l'angle de torsion α de la section S par rapport à S_1 d'encastrement, ne caractérise pas la déformation de torsion, puisqu'il est fonction de l'abscisse x du centre de S .

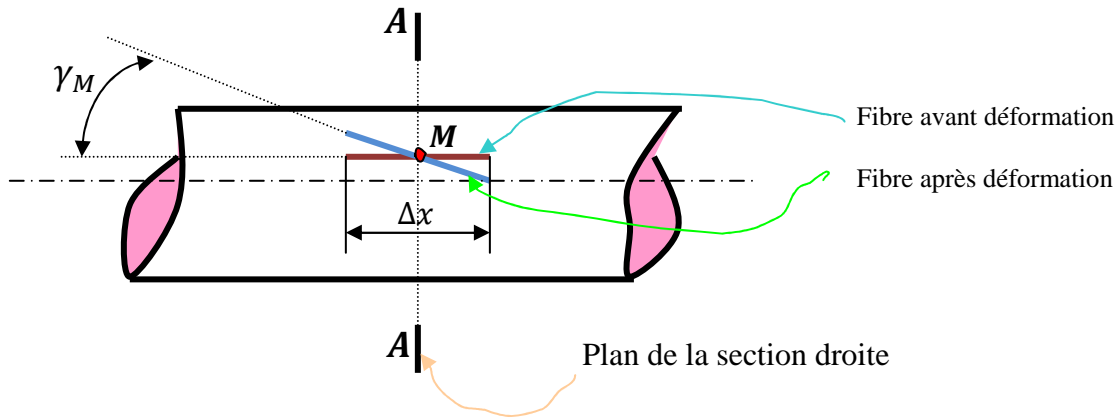
Soit θ l'angle entre deux sections qui tourne l'une par à l'autre distantes de l'unité de longueur.

Soit l'angle $\theta = \frac{\alpha}{x}$ (θ : Angle de torsion unitaire)

$$\begin{cases} \theta = \left(\frac{rd}{mm}\right) \\ \alpha = (rd) \\ x = (mm) \end{cases}$$

3. Loi de HOOKE:

Si nous considérons un petit élément Δx d'une fibre avant et après déformation, on constate que celle-ci a subi une " déviation " γ_M (déformation).



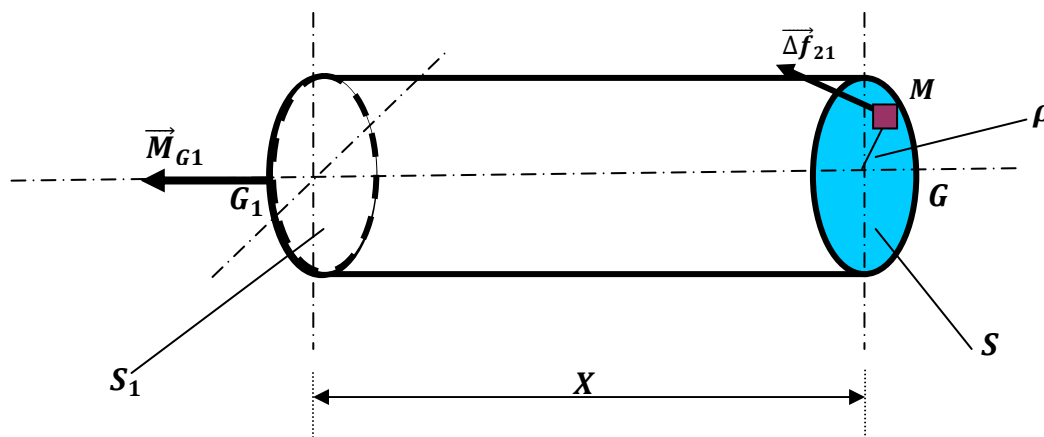
Comme pour l'étude du cisaillement, la loi de HOOKE s'exprime par:

$$\tau_M = G \cdot \gamma_M$$

ou:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_M: \text{est la norme du vecteur contrainte tangentielle en un point } M \text{ d'une section droite.} \\ G: \text{Module d'élasticité transversale (Pour les aciers } G = 8 \cdot 10^4 \left(\frac{N}{mm^2}\right)) \\ \gamma_M: \text{est la valeur absolue de la déviation.} \end{array} \right.$$

III: Contrainte dans une section droite:



Equilibre d'un tronçon de la poutre:

Considérons le tronçon (1) de la poutre compris entre les sections (S_1) d'encastrement et la section (S) d'abscisse x .

Soit une surface élémentaire ΔS située à la distance $\rho = \overline{GM}$.

Le tronçon (1) est en équilibre sous l'action de:

- du système des forces extérieures à la poutre qui agissent sur (1)
- du système des forces de cohésions $\overline{\Delta f}_{21}$ dans la section S.

III.1: Définition:

Dans une section (S) de centre de gravité G , le moment de torsion M_t est la projection sur la normale extérieure G_x de la somme des moments en G de toutes les forces extérieures à gauche de (S).

Equation d'équilibre:

$$\text{en } G: \begin{cases} \sum \overline{F}_i \text{ à gauche} + \sum \overline{\Delta f}_{21} = \vec{0} \\ \sum \overline{M}_G(\overline{F}_i) \text{ à gauche} + \sum \overline{M}_G(\overline{\Delta f}_{21}) = \vec{0} \end{cases}$$

La théorie de l'élasticité permet de démontrer que ces forces élémentaires $\overline{\Delta f}_{21}$ sont dans le plan de la section droite (S) et normale au rayon G_M . La contrainte tangentielle $\vec{\tau}_{M21}$ en un point M situé à une distance " ρ " est alors définie par:

$$\vec{\tau}_{M21} = \lim \frac{\overline{\Delta f}_{21}}{\Delta S}$$

III.2: Répartition des contraintes dans la section droite:

Soit " ρ " le rayon compris entre le centre de gravité G et la fibre la plus éloignée, et τ_M la contrainte tangentielle au point M de la section (S).

Étudions la déviation γ_M de la fibre en M du tronçon considéré de longueur x .

Compte tenu de la valeur extrêmement réduite de γ_M , on peut exprimer l'arc MM' de la façon suivante.

Conclusion:

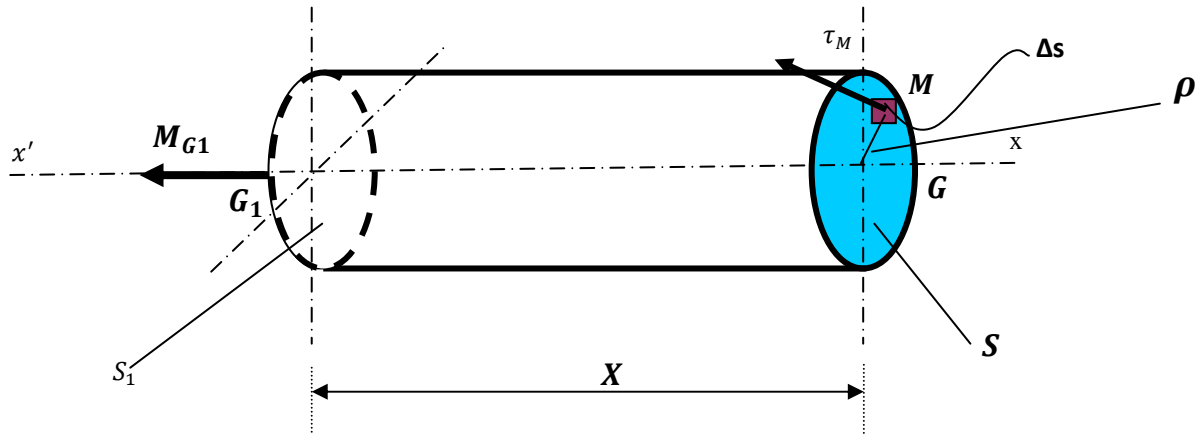
La contrainte tangentielle de torsion τ_M est proportionnelle à la distance ρ du point M à la fibre moyenne. La contrainte en un point de la fibre moyenne est nulle. La fibre moyenne est dans ce cas appelée **fibre neutre**.

La contrainte en un point M est maximale lorsque le point M est le point le plus éloigné de la trace de la fibre neutre dans le plan de la section (s).

$$\rho_{max} = R$$

IV : Equation de déformation élastique:

IV.1 : Relation entre le moment de torsion et la déformation angulaire:



L'équation d'équilibre du tronçon (1):

$$\begin{cases} \sum \vec{\tau}_M \cdot \Delta S = \vec{0} ; & d'ou \quad \vec{\Delta f}_{21} = \vec{\tau}_M \cdot \Delta S \\ \vec{M}_t + \sum \vec{M}_G (\vec{\tau}_M \cdot \Delta S) = \vec{0} \end{cases}$$

$$-M_t + \sum \rho \cdot \tau_M \cdot \Delta S = 0$$

On sait que:

$$\tau_M = G \cdot \theta \cdot \rho$$

Remplaçons τ_M dans l'équation précédente:

$$M_t = G \cdot \theta \cdot \sum \rho^2 \cdot \Delta S \quad ==> \quad M_t = G \cdot \theta \cdot I_0$$

Ou

$$I_0 = \int \rho^2 \cdot dS$$

I_0 : Moment d'inertie polaire

Cette équation établie dans la zone des déformations élastiques est appelée équation de déformation élastique. Elle établit une relation de proportionnalité entre le moment de torsion M_t et l'angle unitaire de torsion θ . (G et I_0 sont des constantes pour un matériau et une section donnée).

IV.2: Condition de rigidité:

Pour certains arbres de grande longueurs (ex. Sondes de forage, arbre des grands navire, etc.....), on doit éviter les grandes déformations de torsion. Pour assurer une rigidité convenable à la transmission, on impose généralement une limite à l'angle unitaire de torsion :

$$\theta \leq \theta_{limite}$$

Ordre de grandeur de $\theta_{limite} = 0,5 \text{ } ^\circ/m$ c'est à dire $\theta_{limite} = 0,5 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 10^{-3} \text{ (rd/mm)}$

V: Condition de résistance:

V.1: Expression de la contrainte de torsion:

L'expression précédente nous donne la contrainte en un point M d'une section droite situé à la distance ρ de la fibre neutre.

$$\tau_M = G \cdot \theta \cdot \rho$$

et l'expression de déformation élastique de la poutre

$$M_t = G \cdot \theta \cdot I_0$$

En éliminant l'angle unitaire de torsion entre ces deux expressions, on peut écrire la contrainte τ_M en fonction du moment de torsion.

$$\tau_M = \rho \frac{M_t}{I_0}$$

V.2: Contrainte maximale de torsion:

On suppose que le moment de torsion maximal est connu $M_{t \max}$. Nous verrons dans les problèmes résolus que le moment de torsion n'est pas toujours constant tout le long de l'arbre.

Désignons par " ν " la valeur maximale de " ρ ", le plus souvent $\nu = R$.

(R : Rayon de la poutre cylindrique).

V.3: Contrainte à la limite élastique:

C'est la contrainte maximale correspondant au moment M_A de la figure qui est limité par l'essai de torsion.

$$\tau_e = \frac{M_A}{\left(I_0 / \nu \right)}$$

V.4: Contrainte à la limite pratique:

$$\tau_p = \tau_e / s$$

ou, s : coefficient de sécurité

V.5: Condition de résistance:

$$\tau_{max} \leq \tau_p$$

Exercice N° 1:

Un arbre de torsion tubulaire de diamètre extérieur D , de diamètre intérieur d , de longueur 1200 mm , doit transmettre une puissance $P = 314 \text{ KW}$ à la vitesse de rotation $n = 1500 \text{ tr/min}$ et l'angle de torsion total entre les extrémités doit être 20° . Cet arbre en acier à une résistance pratique $R_p = 400 \text{ N/mm}^2$; $G = 8.10^4 \text{ N/mm}^2$.

- Calculer les valeurs des diamètres D , d et faite la vérification.

SOLUTION Exercice N° 1:

La contrainte en chaque point est définie par: $\tau = G\theta\rho$

elle est maximum pour $\rho_{max} = D/2 = R$

$$\text{Donc } \tau_{max} = G\theta D/2$$

La condition de résistance est : $\tau_{max} = G\theta D/2 \leq R_p$

On obtient le diamètre de la forme suivant:

$$D \leq 2 \frac{R_p}{G\theta} = \frac{2.400}{8.10^4 \cdot 0,29.10^{-3}} = 34,48 \text{ mm}$$

$$\text{d'ou on calcul : } \theta = \frac{\alpha}{l} = \frac{20}{1200} \cdot \frac{\pi}{180} = 0,29.10^{-3} \frac{\text{rd}}{\text{mm}}$$

on choisit le diamètre $D = 34 \text{ mm}$

L'équation du moment de torsion est: $M_t = G\theta I_0 = G\theta \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$

$$\text{On tire } d = \sqrt[4]{D^4 - \frac{32M_t}{G\theta\pi}}$$

Calculons d'abord le moment de torsion M_t

$$M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{\pi n/30} = \frac{30.314.10^3}{\pi.1500} = 2000 \text{ Nm} = 2.10^6 \text{ N.mm}$$

$$\text{Donc } d = \sqrt[4]{34^4 - \frac{32.2.10^6}{8.10^4 \cdot 0,29.10^{-3} \cdot \pi}} = 26 \text{ mm}$$

Vérification:

1) Condition de résistance : $\tau_{max} \leq R_p = 400 \text{ N/mm}^2$

$$\tau_{max} = \frac{M_t D}{I_0 \cdot 2} = \frac{2.10^6 \cdot 17}{\frac{\pi}{32} (34^4 - 26^4)} = 393,84 \text{ N/mm}^2 < 400 \text{ N/mm}^2$$

Les unités doivent être
 $P = (\text{Watt})$, $n = (\text{tr/min})$ ou
 $\omega = (\text{rd/s})$
 On tire $M_t = (\text{N.m})$

2) Condition de rigidité : $\alpha \leq 20^\circ$

$$\alpha = \frac{M_t l}{G I_0} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 1200 \cdot 180}{8 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi}{32} (34^4 - 26^4) \pi} = 19,91^\circ < 20^\circ$$

Les deux conditions sont vérifiées pour $D = 34 \text{ mm}$
et $d = 26 \text{ mm}$.